Esercizi sui teoremi di Green, Stokes, Gauss

Esercizio 1. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(x^2y + e^{\arctan\left(\sin x + \log(1+x^2)\right)},\ xy^3 - \cos e^{\sin(y^4+y^2+1)}\right)$$

lungo il bordo del triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ percorso in senso antiorario.

Esercizio 2. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\sin\left(e^{x^8}\right) + 15yz,\ x^2y + \frac{1}{3y^4+7} + xz,\ e^{\cos(6z^4+5)} + 8xy\right)$$

lungo il bordo della superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 9 - x^2 - y^2,\ x \leq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$, orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z.

Esercizio 3. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(5x^2 - 1 + \cos(e^{xz} - 1),\ 5y^2 - \log\left(1 + \arctan^2(xz)\right),\ 2y - \sin(xz)\right)$$

attraverso la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x \geq 0,\ z \geq 0\right\}$, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Esercizio 4. Calcolare il flusso entrante del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(x^3 + y\log(z^2+1),\ 4y + xz\log(1 + x^2z^2),\ z^3 + x\log(y^2+1)\right)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2\right\}$.

Esercizio 5. Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(2x^2 + e^{y^6} - 3z^{10},\ xy + e^{z^6} - 3x^{10},\ 3x^6y^{10} - xz\right)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 3 - y^2 - z^2 \leq x \leq 6 - 4\sqrt{y^2+z^2},\ y^2 + z^2 < 9,\ z \leq 0\right\}$.

Esercizio 6. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(7y - e^{3\sin x},\ 2\cos(e^{3y+1}) - x^2y + 7x\right)$$

lungo il bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 9, \ 0 \le y \le x + 3\}$ percorso in senso orario.

Esercizio 7. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(3yz + \sin^8 x, \ xz + \log^6(1 + y^2), \ 2xy + e^{z^2}\right)$$

lungo il bordo della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 4 - x^2 - y^2, \ x^2 + y^2 \le 3, \ x \ge 0, \ y \ge 0\}$, orientato positivamente rispetto ad un osservatore posto come il vettore uscente dal paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

Esercizio 8. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(y \sin(x + \cos z^4) - 3z, \ y^8 e^{x+z}, \ 3x + 5x^2 z\right)$$

attraverso la superficie $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}, \ y \ge 0\right\}$, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse y.

Esercizio 9. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(e^{\sin x} - 3x^2 y, \ 2xy - \sqrt{2 + \cos y}\right)$$

lungo il bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 4, \ x \ge 0, \ y \ge 0\}$ percorso in senso antiorario.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$.

Denotato con Ω il triangolo OAB, calcoliamo l'integrale $\int_{\partial\Omega} F \cdot dP$.

Osserviamo che $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x\right\}$.

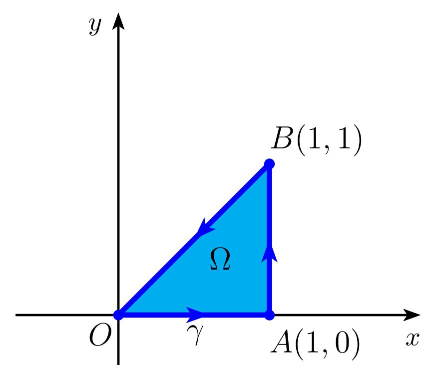
Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy =$$

$$= \int_{\Omega} \left(y^3 - x^2\right) \, dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(y^3 - x^2\right) \, dy\right) \, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}y^4 - x^2 y\right]_0^x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3\right) \, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = -\frac{1}{5}.$$



Esercizio 2. Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove $\mathrm{rot}F$ è il rotore del campo vettoriale F definito dalla scrittura formale

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin\left(e^{x^8}\right) + 15yz & x^2 y + \frac{1}{3y^4+7} + xz & e^{\cos(6z^4+5)} + 8xy \end{vmatrix} =$$

$$= (7x, 7y, 2xy - 14z).$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = 9 - x^2 - y^2$, dove

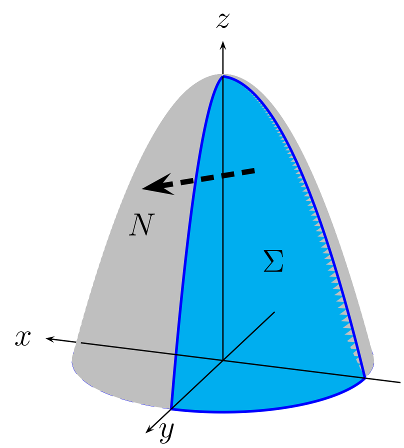
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 9, \ x \le 0, \ y \ge 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x,y) = (x,\, y,\, 9 - x^2 - y^2)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \mathrm{rot} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \; dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z. Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\, -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\, 1 \right) = (2x,\, 2y,\, 1)\,.$$



Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi un vettore normale a Σ che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z è $N(x,y) = -N_\sigma(x,y) = (-2x, -2y, -1)$.

Si ha che

$$\mathrm{rot} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = \mathrm{rot} F\left(x,\, y,\, 9 - x^2 - y^2\right) \cdot (-2x,\, -2y,\, -1) =$$

$$= \left(7x, 7y, 2xy - 126 + 14x^2 + 14y^2\right) \cdot (-2x,\, -2y,\, -1) = 126 - 28x^2 - 28y^2 - 2xy.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \mathrm{rot} F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \; dx\, dy = \int_K \left(126 - 28x^2 - 28y^2 - 2xy\right) \; dx\, dy =$$

passando in coordinate polari nel piano xy

$$= \int_{K'} \left(126 - 28\rho^2 - 2\rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta\right) \rho \, d\rho \, d\vartheta = \int_{K'} \left(126\rho - 28\rho^3 - 2\rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\right) \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,3] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$= 7\pi \left(\int_0^3 \left(9\rho - 2\rho^3\right) \, d\rho \right) - 2 \left(\int_0^3 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \right) =$$

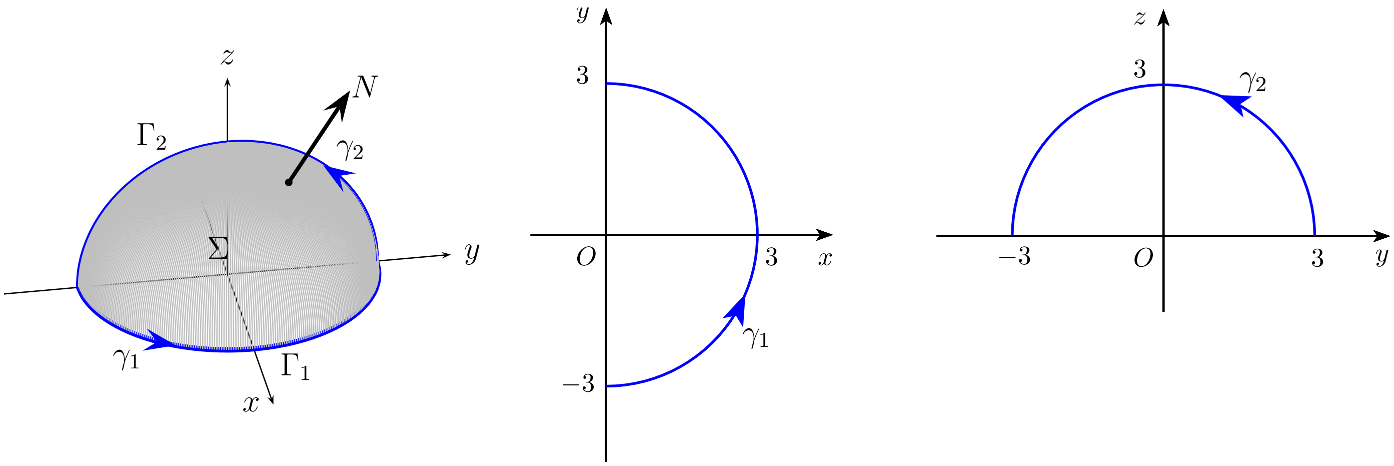
$$= 7\pi \left[\frac{9}{2}\rho^2 - \frac{1}{2}\rho^4 \right]_0^3 - 2 \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^3 \left[\frac{1}{2} \sin^2\vartheta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{81}{4}.$$

Esercizio 3. Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP.$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ x^2+y^2=9,\ \ z=0,\ \ x \geq 0\right\},\ \Gamma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ y^2+z^2=9,\ \ x=0,\ \ z \geq 0\right\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve parametriche che parametrizzano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ, che deve formare un angolo **acuto** con il versore fondamentale dell'asse z.

Si ha che $\gamma_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ è $\gamma_1(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt,$$

dove

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F\Big(3\cos t, 3\sin t, 0\Big) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0) = \left(45\cos^2 t, 45\sin^2 t, 6\sin t\right) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0) =$$

$$= -135\sin t\cos^2 t + 135\cos t\sin^2 t.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt = 135 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin t\cos^2 t + \cos t\sin^2 t\right)\, dt =$$

$$= 135 \left[\frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 90.$$

Inoltre si ha che $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ è $\gamma_2(t) = (0, 3\cos t, 3\sin t)$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^{\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt,$$

dove

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F\Big(0, 3\cos t, 3\sin t\Big) \cdot (0, -3\sin t, 3\cos t) = \big(0, 45\cos^2 t, 6\cos t\big) \cdot (0, -3\sin t, 3\cos t) =$$

$$= -135 \sin t \cos^2 t + 18 \cos^2 t.$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^{\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt = \int_0^{\pi} \big(-135 \sin t \cos^2 t + 18\cos^2 t\big)\, dt =$$

$$= \Big[45 \cos^3 t + 9(t + \sin t \cos t)\Big]_0^{\pi} = 9\pi - 90.$$

In conclusione si ha che

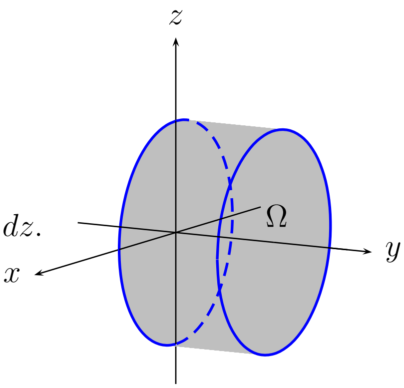
$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 90 + 9\pi - 90 = 9\pi.$$

Esercizio 4. Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per le proprietà degli integrali di flusso, il flusso entrante di F da $\partial\Omega$ è l'opposto del flusso uscente di F da $\partial\Omega$.

Per il Teorema di Gauss si ha che il flusso uscente di F da $\partial\Omega$ è

$$\int_{\partial\Omega^+} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\mathrm{div} F(x, y, z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.



Quindi $\operatorname{div} F(x,y,z) = 3(x^2+z^2)+4$ e

$$\int_{\partial\Omega^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_\Omega \left[3(x^2+z^2)+4\right]\, dx\, dy\, dz.$$

Osserviamo che Ω è l'insieme dei punti del cilindro retto di equazione $x^2+z^2=4$ e dei punti interni ad esso, compresi fra i piani $y=0$ e $y=2$. Passiamo in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse y. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = y \\ z = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,\ y \in \mathbb{R}, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta,y)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y,z) \in \Omega \qquad \iff \qquad \begin{cases} x^2+z^2 \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \\ 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Quindi $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,y) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\right\}.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_\Omega \left[3(x^2+z^2)+4\right]\, dx\, dy\, dz. = \int_{\Omega'} \left(3\rho^3+4\rho\right)\, d\rho\, d\vartheta\, dy =$$

essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ, ϑ e y e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ, una di ϑ e una di y, si ottiene

$$= 4\pi \left(\int_0^2 \left(3\rho^3+4\rho\right)\, d\rho\right) = 4\pi \left[\frac{3}{4}\rho^4 + 2\rho^2\right]_0^2 = 80\pi.$$

In conclusione, il flusso entrante di F da $\partial\Omega$ è

$$\int_{\partial\Omega^-} F \cdot n \, d\sigma = -\int_{\partial\Omega^+} F \cdot n \, d\sigma = -80\pi.$$

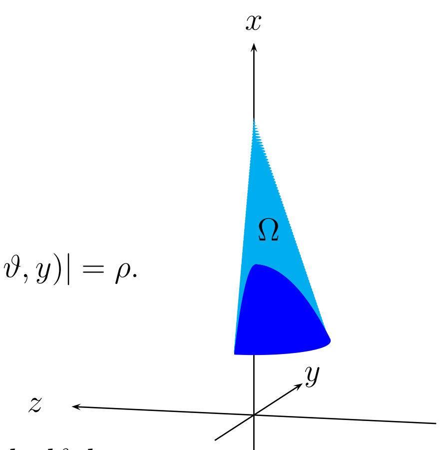
Esercizio 5. Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div} F(x,y,z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\mathrm{div} F(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$.

Quindi $\mathrm{div} F(x,y,z) = 4x$ e

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div} F(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 4x \, dx \, dy \, dz.$$



Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x.
Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = x \\ y = \rho \cos\vartheta \\ z = \rho \sin\vartheta \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \ x \in \mathbb{R}, \qquad |\mathrm{det} J_\Phi(\rho, \vartheta, y)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div} F(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 4x \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} 4x\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \left\{ (\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq \rho \leq 1, \ \pi \leq \vartheta \leq 2\pi, \ 3 - \rho^2 \leq x \leq 6 - 4\rho \right\}$.

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega'} 4x\rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx = \pi \int_0^1 \rho \left(\int_{3-\rho^2}^{6-4\rho} 4x \, dx \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho \left[x^2 \right]_{3-\rho^2}^{6-4\rho} d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho \left[(6-4\rho)^2 - (3-\rho^2)^2 \right] \, d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho \left(22\rho^2 - 48\rho + 27 - \rho^4 \right) \, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(22\rho^3 - 48\rho^2 + 27\rho - \rho^5 \right) \, d\rho = 2\pi \left[\frac{11}{2}\rho^4 - 16\rho^3 + \frac{27}{2}\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^1 = \frac{17}{3}\pi.$$

Esercizio 6. Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$.

Per le proprietà degli integrali di linea, l'integrale di linea del campo F lungo $\partial\Omega$ percorso in senso orario è l'opposto dell'integrale di linea di F lungo $\partial\Omega$ percorso in senso antiorario.

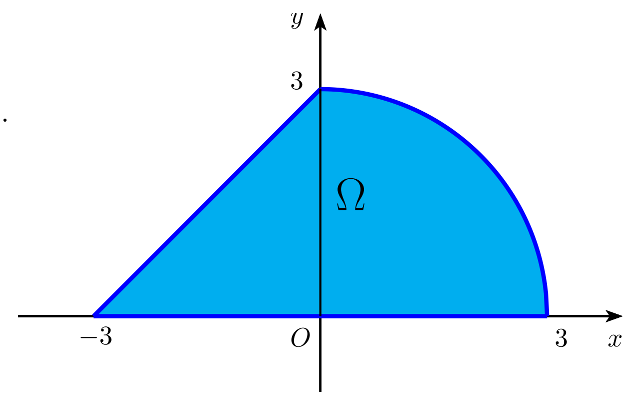
Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che l'integrale di linea di F lungo $\partial\Omega$ percorso in senso antiorario è

$$\int_{\partial\Omega^+} F \cdot dP = \int_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy =$$

$$= -2 \int_\Omega xy\,dx\,dy.$$

Osserviamo che

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 3, \ y-3 \le x \le \sqrt{9-y^2} \right\}.$$



Quindi è un insieme x-semplice. Procedendo con l'integrazione si ottiene

$$\int_{\partial\Omega^+} F \cdot dP = -2 \int_0^3 \left(\int_{y-3}^{\sqrt{9-y^2}} xy\,dx \right) dy =$$

$$= -2 \int_0^3 y \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{y-3}^{\sqrt{9-y^2}} dy = -2 \int_0^3 \left(3y^2 - y^3 \right) dy =$$

$$= -2 \left[y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^3 = -\frac{27}{2}.$$

In conclusione l'integrale di linea del campo F lungo $\partial\Omega$ percorso in senso orario è

$$\int_{\partial\Omega^-} F \cdot dP = \int_{\partial\Omega^+} F \cdot dP = \frac{27}{2}.$$

Esercizio 7. Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \text{rot}F \cdot n\,d\sigma.$$

dove rot$F$ è il rotore del campo vettoriale F definito dalla scrittura formale

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \qquad \text{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3zy + \sin^8 x & xz + \log^6(1+y^2) & 2xy + e^{z^2} \end{vmatrix} = (x, y, -2z).$$

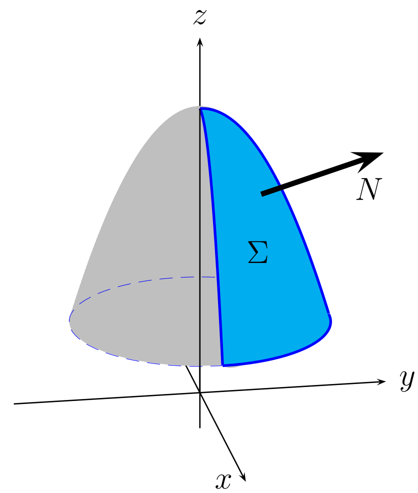
La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 + y^2 \leq 3, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$.
Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \mathrm{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale uscente dal paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.



Un vettore normale al piano tangente a Σ è

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), 1\right) = (2x, \; 2y, \; 1).$$

Questo vettore è uscente dal paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$. Si ha che

$$\mathrm{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) = \mathrm{rot} F \left(x, y, 4 - x^2 - y^2\right) \cdot (2x, \; 2y, \; 1) =$$

$$= \Big(x, \; y, \; 2x^2 + 2y^2 - 8\Big) \cdot (2x, \; 2y, \; 1) = 4\left(x^2 + y^2\right) - 8.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \mathrm{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K \left[4\left(x^2 + y^2\right) - 8\right] \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari nel piano

$$= \int_{K' = \left[0, \sqrt{3}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \left(4\rho^2 - 8\right) \rho \, d\rho \, d\vartheta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(4\rho^3 - 8\rho\right) \, d\rho = \frac{\pi}{2} \left[\rho^4 - 4\rho^2\right]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{3}{2}\pi.$$

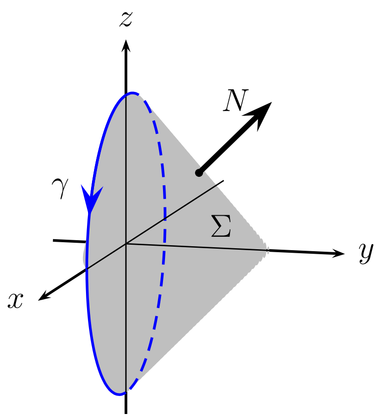
Esercizio 8. Si ha che F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Per il Teorema di Stokes si ha che

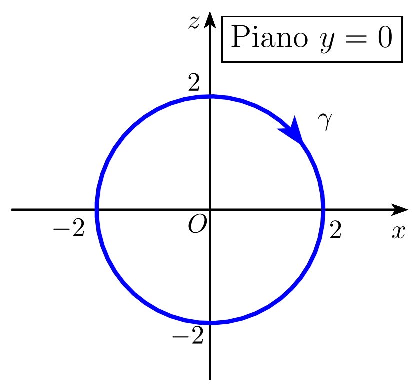
$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP,$$

dove il bordo di Σ è orientato in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse y che è $\mathbf{j}$.

Si ha che

$$\partial\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + z^2 = 4, \;\; y = 0\right\}.$$





Una curva parametrica γ che parametrizza $\partial\Sigma$ inducendo tale verso di percorrenza è ad esempio $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (2\cos t, 0, -2\sin t).$$

Quindi

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Per ogni $t \in [0, 1]$ si ha che

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(2\cos t, 0, -2\sin t) \cdot (-2\sin t, 0, -2\cos t) =$$

$$= (6\sin t,\ 0,\ 6\cos t - 40\cos^2 t \sin t) \cdot (-2\sin t, 0, -2\cos t) =$$

$$= 80\cos^3 t \sin t - 12\sin^2 t - 12\cos^2 t = 80\cos^3 t \sin t - 12.$$

Ne segue che

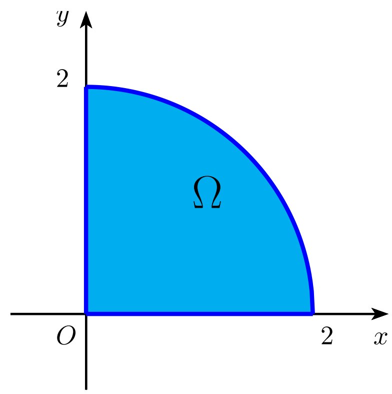
$$\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n\, d\sigma = \int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(80\cos^3 t \sin t - 12\right)\, dt = -24\pi.$$

Esercizio 9. Il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$.

Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dP = \int_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\, dy =$$

$$= \int_\Omega \left(2y + 3x^2\right)\, dx\, dy =$$



passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= \int_{\Omega'} \left(2\rho^2 \sin\vartheta + 3\rho^3 \cos^2\vartheta\right)\, d\rho\, d\vartheta =$$

essendo $\Omega' = [0,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$= 2 \left(\int_0^2 \rho^2\, d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta \right) + 3 \left(\int_0^2 \rho^3\, d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta\, d\vartheta \right) =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^2 \left[-\cos\vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3 \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^2 \left[\frac{1}{2}(\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3} + 3\pi.$$